

10. ÜBUNGSBLATT
Prof. Stefan Friedl PhD

Abgabe spätestens bis *Donnerstag den 9. Januar* um 12 Uhr.

Aufgabe 1. Es sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Isometrie, so dass für alle $P \in \mathbb{R}^2$ und $v \in \mathbb{Z}^2$ gilt, dass

$$f(P + v) = f(P) + w$$

für ein $w \in \mathbb{Z}^2$. Zeigen Sie, dass f Verknüpfung von folgenden Typen von Abbildungen ist:

- (1) Translation.
- (2) Drehung um den Winkel $\frac{\pi}{2}$.
- (3) Spiegelung an der Diagonale $x = y$.

Sie können hierbei verwenden, dass jede Isometrie von $\mathbb{R}^2$ eine Verknüpfung von folgenden Typen von Abbildungen ist:

- (1) Translation.
- (2) Drehung um einen beliebigen Winkel.
- (3) Spiegelung an einer beliebigen Gerade.

Aufgabe 2. Sei $A \in GL(2, \mathbb{R})$ und $A \cdot \mathbb{Z}^2 := \{Av : v \in \mathbb{Z}^2\}$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $A \cdot \mathbb{Z}^2$ diskret durch Translationen auf $\mathbb{R}^2$ wirkt. Für welche der folgenden Matrizen A_i ist $\mathbb{R}^2/A_i \cdot \mathbb{Z}^2$ isometrisch zu $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } A_2 := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Hinweis: Betrachten Sie Winkel zwischen „kurzen“ Geodätischen oder deren Perioden.

Aufgabe 3. Sei $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ das Standardgitter.

- (1) Für welche Punkte $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ enthält die Strecke zwischen 0 und (p, q) in $\mathbb{R}^2$ keinen weiteren Punkt aus $\mathbb{Z}^2$ neben den begrenzenden Punkten $(0, 0)$ und (p, q) ?
- (2) Zeigen Sie, es gibt Geodätische mit beliebig langer Periode auf dem Torus $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Aufgabe 4. Es sei $k \geq 5$. Ein k -Eck heißt regulär, wenn es zu je zwei Eckpunkten P und Q eine Isometrie gibt, welche das k -Eck als Menge erhält, und welche P auf Q schickt.

- (a) Zeigen Sie, dass es in der hyperbolischen Geometrie ein reguläres k -Eck gibt, so dass der Innenwinkel an jeder Ecke genau $\frac{2\pi}{k}$ ist.
Hinweis: Welches Model ist hilfreicher? Was ist der Innenwinkel bei sehr kleinen regulären k -Ecken?
- (b) Was ist die Fläche von dem in (a) konstruierten k -Eck?